

# Fonction holomorphe

October 16, 2023

Le but de ce texte est de montrer qu'une fonction holomorphe (au sens où la limite du quotient différentiel existe) sur un ouvert simplement connexe admet une primitive globale. Ce texte est en grande partie une adaptation en français de la théorie en question développée dans 'Complex analysis' de Serge Lang pp.104-120.

**Proposition 1.** Soit  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'ensembles compacts de  $\mathbb{C}$  tel que:

1.  $C_n \neq \emptyset \quad \forall n$ ,
2.  $C_{n+1} \subseteq C_n \quad \forall n$ ,
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(C_n) = 0$ ,

Alors  $\exists z \in \mathbb{C}$  tel que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n = \{z\}$ .

*Proof.* Comme  $C_n$  est compact  $\forall n \in \mathbb{N}$  et  $C_{n+1} \subseteq C_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , nous savons que  $C := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$  est compact et non vide.

Soit  $z, w \in C$  alors  $|z - w| \leq \text{diam}(C_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$  donc  $z = w$ . □

**Definition 1.** Un rectangle  $R \subseteq \mathbb{C}$  est un ensemble compact, connexe et non vide tel que  $R = \Re(R) + i\Im(R)$ .

De façon équivalente, un rectangle est un ensemble de la forme  $[a, b] + i[c, d] \subseteq \mathbb{C}$  avec  $a \leq b$  et  $c \leq d$ .

**Lemma 1.** Soit  $R = [a, b] + i[c, d]$  un rectangle dans  $\mathbb{C}$ , alors

1.  $\text{diam}(R) = |(b + id) - (a + ic)| = \sqrt{(b - a)^2 + (d - c)^2}$ ,
2.  $\partial R = [a + ic, b + ic] \cup [b + ic, b + id] \cup [b + id, a + id] \cup [a + id, a + ic]$  (l'union de 4 segments),
3.  $l(\partial R) = 2(b - a) + 2(d - c)$ .

*Proof.*  $\forall z, w \in R$ , nous avons que  $|\Re(z - w)| \leq (b - a)$  et  $|\Im(z - w)| \leq (d - c)$ , donc  $|z - w| \leq \sqrt{(b - a)^2 + (d - c)^2}$ .

Ainsi  $\text{diam}(R) \leq \sqrt{(b - a)^2 + (d - c)^2} = |(b + id) - (a + ic)| \leq \text{diam}(R)$ .

Dans un produit d'espaces topologiques  $X \times Y$ , nous savons que  $\partial(A \times B) = (\partial A \times \text{cl}(B)) \cup (\text{cl}(A) \times \partial B)$  où  $A \subset X$  et  $B \subset Y$ .

De ceci, nous déduisons la forme de  $\partial R$ .

Pour finir, il suffit de remarquer que  $l([z, w]) = |w - z|$ ,  $\forall z, w \in \mathbb{C}$ .

□

**Remark.** Dans la suite, l'intégrale le long d'un segment  $[z, w]$  se fait selon la paramétrisation à vitesse constante  $\gamma(t) = z + t(w - z)$ ,  $t \in [0, 1]$ .

De même, celle le long du bord d'un rectangle se fait selon la concaténation des 4 segments dans l'ordre décrit ci-dessus.

**Definition 2.** Soit  $U \subseteq \mathbb{C}$  un ouvert et  $z \in U$ .

Une fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  est holomorphe en  $z$  si la limite  $\lim_{\zeta \rightarrow z} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}$  existe dans  $\mathbb{C}$ , auquel cas nous la dénotons par  $f'(z)$ .

$f$  est holomorphe sur  $U$  si  $f$  est holomorphe en tout point de  $U$ .

**Definition 3.** Soit  $U \subseteq \mathbb{C}$  un ouvert.

Une fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  admet une primitive locale si  $\forall z \in U$ , il existe  $\delta > 0$  et  $F : D(z, \delta) \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe tel que  $D(z, \delta) \subseteq U$  et  $F'(\zeta) = f(\zeta) \forall \zeta \in D(z, \delta)$ .

**Lemma 2.** Soit  $R = [a, b] + i[c, d]$  un rectangle. Considérons les rectangles:

1.  $R_1 = [a, \frac{a+b}{2}] + i[\frac{c+d}{2}, d]$ ,
2.  $R_2 = [\frac{a+b}{2}, b] + i[\frac{c+d}{2}, d]$ ,
3.  $R_3 = [a, \frac{a+b}{2}] + i[\frac{c+d}{2}, d]$ ,
4.  $R_4 = [\frac{a+b}{2}, b] + i[\frac{c+d}{2}, d]$ .

Alors  $\text{diam}(R_i) = \frac{\text{diam}(R)}{2}$  et  $l(\partial R_i) = \frac{l(\partial R)}{2}$ ,  $\forall i \in [4]$ .

De plus  $\oint_{\partial R} f = \sum_{i=1}^4 \oint_{\partial R_i} f$ .

*Proof.* Remarquons d'abord que tous les  $R_i$  sont des translations de  $R_1$ , donc tous les  $R_i$  ont le même diamètre et les  $\partial R_i$  la même longueur.

Une vérification directe donne les résultats. □

**Lemma 3.** Soit  $D = D(z_0, r) \subseteq \mathbb{C}$  un disque ouvert et  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe alors  $\oint_R f(\zeta) d\zeta = 0$  pour tout rectangle  $R \subseteq D$ .

*Proof.* Considérons un rectangle  $R^0 \subseteq D$  et les 4 rectangles  $R_i^1$ ,  $i \in [4]$  selon le lemme précédent.

Nous avons alors  $|\oint_{\partial R^0} f(\zeta) d\zeta| = |\sum_{i=1}^4 \oint_{\partial R_i^1} f(\zeta) d\zeta| \leq \sum_{i=1}^4 |\oint_{\partial R_i^1} f(\zeta) d\zeta| \leq 4 |\oint_{\partial R_{i_1}^1} f(\zeta) d\zeta|$  où  $i_1 \in [4]$  est tel que  $|\oint_{\partial R_{i_1}^1} f(\zeta) d\zeta| = \max_{j \in [4]} |\oint_{\partial R_j^1} f(\zeta) d\zeta|$ .

Notons alors  $R^1 = R_{i_1}^1$ .

En itérant la procédure, nous obtenons, une suite de rectangle  $(R^n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant  $\text{diam}(R^n) = \frac{\text{diam}(R^0)}{2^n}$ ,  $l(\partial R^n) = \frac{l(\partial R^0)}{2^n}$  et  $|\oint_{\partial R^0} f(\zeta) d\zeta| \leq 4^n |\oint_{\partial R^n} f(\zeta) d\zeta|$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

En particulier,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(R^n) = 0$ .

Comme  $R^n \neq \emptyset$  et  $R^{n+1} \subset R^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , nous obtenons  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} R^n = \{z\}$  pour un certain  $z \in D$ .

Soit  $\epsilon > 0$ , puisque  $f$  est holomorphe en  $z$ , il existe  $\delta > 0$  tel que  $|f(\zeta) - f(z) - f'(z)(\zeta - z)| \leq \frac{\epsilon}{l(\partial R^0) \text{diam}(R^0) + 1} |\zeta - z|$ ,  $\forall \zeta \in D(z, \delta) \subset D$ .

Choisissons  $N \in \mathbb{N}$  suffisamment grand pour que  $R^N \subset D(z, \delta)$ .

Alors

$$\begin{aligned}
\left| \oint_{\partial R^0} f(\zeta) d\zeta \right| &\leq 4^N \left| \oint_{\partial R^N} f(\zeta) d\zeta \right| \\
&\leq 4^N \left| \oint_{\partial R^N} f(\zeta) - f(z) - f'(z)(\zeta - z) d\zeta \right| \\
&\leq 4^N l(\partial R^N) \frac{\epsilon}{l(R^0) \text{diam}(R^0) + 1} \sup_{\zeta \in \partial R^N} |\zeta - z| \\
&\leq 2^N \frac{\epsilon l(\partial R^0)}{l(\partial R^0) \text{diam}(R^0) + 1} \text{diam}(R^N) \\
&\leq \epsilon \frac{l(\partial R^0) \text{diam}(R^0)}{l(\partial R^0) \text{diam}(R^0) + 1} \\
&\leq \epsilon
\end{aligned}$$

Comme  $\epsilon > 0$  était arbitraire, nous obtenons le résultat voulu.  $\square$

**Lemma 4.** Soit  $D = D(z_0, \delta) \subseteq \mathbb{C}$  un disque ouvert et  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe alors  $f$  admet une primitive.

*Proof.* Définissons  $F : D \rightarrow \mathbb{C}$  par  $F(z) = \int_{\gamma_{z_0, z}} f(\zeta) d\zeta$  où  $\gamma_{z_0, z} = [z_0, z_0 + c] \oplus [z_0 + c, z]$  avec  $c = \Re(z - z_0)$ .

Montrons que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $D$ .

Soit  $z, w \in D$ .

Posons  $a = \Re(w - z)$  et  $b = \Re(z - z_0)$ , alors

$$\begin{aligned}
F(w) &= \int_{[z_0, z_0+b]} f(\zeta) d\zeta + \int_{\gamma_{z_0+b, z+a}} f(\zeta) d\zeta + \int_{[z+a, w]} f(\zeta) d\zeta, \\
F(z) &= \int_{[z_0, z_0+b]} f(\zeta) d\zeta + \int_{[z_0+b, z]} f(\zeta) d\zeta.
\end{aligned}$$

Ainsi, si  $R$  est le rectangle dont 3 des sommets sont  $z_0 + b, z$  et  $z + a$ ,

$$F(w) - F(z) = \pm \int_{\partial R} f(\zeta) d\zeta + \int_{\gamma_{z, w}} f(\zeta) d\zeta = \int_{[z, z+a]} f(\zeta) d\zeta + \int_{[z+a, w]} f(\zeta) d\zeta.$$

Nous obtenons alors

$$\frac{F(w) - F(z)}{w - z} - f(z) = \frac{1}{w - z} \int_{[z, z+a] \oplus [z+a, w]} f(\zeta) - f(z) d\zeta.$$

Finalement,

$$\left| \frac{F(w) - F(z)}{w - z} - f(z) \right| \leq \sup_{|\zeta - z| \leq |w - z|} |f(\zeta) - f(z)|.$$

Comme  $f$  est continue en  $z$ , nous avons  $\lim_{w \rightarrow z} \sup_{|\zeta - z| \leq |w - z|} |f(\zeta) - f(z)| = 0$ , ce qui conclut la preuve.  $\square$

**Corollary 1.** Soit  $U \subseteq \mathbb{C}$  un ouvert et  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe alors  $f$  admet une primitive locale.

*Proof.*  $\square$

**Lemma 5.** Soit  $U \subseteq \mathbb{C}$  un ouvert et  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$  un chemin dans  $U$  alors  $D(\text{Im}(\gamma), U^C) > 0$ .

*Proof.* Définissons  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  par  $f(t) = d(\gamma(t), U^C)$  alors  $f$  est continue puisque c'est une composition de fonctions continues.

Comme  $[0, 1]$  est compact,  $f$  atteint son minimum, disons en  $s \in [0, 1]$  donc  $d(\text{Im}(\gamma), U^C) = f(s) = d(\gamma(s), U^C)$ .

En remarquant que  $U^C$  est fermé et que  $\text{Im}(\gamma) \cap U^C = \emptyset$ , on obtient  $f(s) > 0$ .  $\square$

**Remark.** En utilisant les notations du lemme précédent, notons  $\varepsilon = \frac{1}{2}d(\text{Im}(\gamma), U^C)$  alors  $\text{Im}(\gamma) \subseteq \bigcup_{t \in [0, 1]} D(\gamma(t), \varepsilon) \subseteq U$ . Puisque  $\text{Im}(\gamma)$  est compact, il existe un sous recouvrement fini.

Nous avons alors montré que si  $\gamma$  est une chemin dans un ouvert  $U$  alors il existe  $D_1 \dots D_n \subseteq U$  des disques ouverts tel que  $\text{Im}(\gamma) \subseteq \bigcup_{i=1}^n D_i$ .

Plus précisément, il existe une partition  $\{t_0 < t_1 < \dots < t_n\}$  de  $[0, 1]$  tel que  $\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subseteq D_i \forall i \in [n]$ .

En utilisant cette remarque, il est possible de définir l'intégrale d'une fonction holomorphe le long d'un chemin (sans supposer qu'il soit  $C^1$ ).

**Definition 4.** Soit  $U \subseteq \mathbb{C}$  un ouvert,  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$  un chemin et  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe.

Par la remarque précédente, nous savons qu'il existe  $\{t_0 < t_1 < \dots < t_n\}$  une partition de  $[0, 1]$  et  $D_1, \dots, D_n$  des disques ouverts dans  $U$  tel que  $\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subseteq D_i \forall i \in [n]$ , nous définissons alors

$$\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = \sum_{i=1}^n F_i(\gamma(t_i)) - F_i(\gamma(t_{i-1}))$$

ou  $F_i$  est une primitive de  $f$  sur  $D_i$  pour tout  $i \in [n]$ .

Il faut vérifier a présent que cette définition est indépendante de la partition de  $[0, 1]$  choisie, des disques ouverts choisis et des primitives choisies.

*Proof.* Montrons d'abord qu'étant donné un choix de partition, la valeur de la somme est indépendante des disques et des primitives choisies.

Plus précisément, soit  $\{t_0 < t_1 < \dots < t_n\}$  une partition de  $[0, 1]$ ,  $D_1, \dots, D_n$  et  $E_1, \dots, E_n$  des disques tels que  $\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subseteq D_i \cap E_i \forall i \in [n]$  et  $F_i : D_i \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $G_i : E_i \rightarrow \mathbb{C}$  des primitives locales de  $f$  pour tout  $i \in [n]$ .

Nous savons alors que  $\forall i \in [n]$ ,  $\exists c_i \in \mathbb{C}$  tel que  $G_i = F_i + c_i$  sur  $E_i \cap D_i$ , donc

$$\sum_{i=1}^n F_i(\gamma(t_i)) - F_i(\gamma(t_{i-1})) = \sum_{i=1}^n G_i(\gamma(t_i)) - G_i(\gamma(t_{i-1})).$$

Il suffit alors de montrer qu'étant donné 2 partitions de  $[0, 1]$ , il est possible de se ramener à un raffinement commun en préservant la valeur de la somme.

Plus précisément, étant donné 2 partitions  $P$  et  $P'$  de  $[0, 1]$ , nous allons montrer que la somme obtenue à partir de  $P$  est la même que celle obtenue à partir de  $P'$  en montrant qu'elles coïncident avec celle obtenue à partir de  $P \cup P'$ .

Pour cela, soit  $\{t_0 < t_1 < \dots < t_n\}$  une partition de  $[0, 1]$  avec des disques  $D_1, \dots, D_n$  et des primitives  $F_1, \dots, F_n$  comme ci-dessus.

Considérons la partition obtenue en rajoutant le point  $c \in (t_{k-1}, t_k)$  pour un certain  $k \in [n]$ .

Nous avons alors  $\gamma([t_{k-1}, c]) \cup \gamma([c, t_k]) \subseteq D_k$ .

En considérant les disques  $D_1, \dots, D_{k-1}, D, D_k, \dots, D_n$  et les primitives  $F_1, \dots, F_{k-1}, F, F_k, \dots, F_n$  ou  $D = D_k$  et  $F = F_k$ , nous obtenons l'égalité recherchée.

En itérant ce processus un nombre fini de fois pour passer d'une partition à un raffinement, nous obtenons le résultat voulu.  $\square$

**Definition 5.** Soit  $U \subseteq \mathbb{C}$  un domaine et  $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow U$  deux chemins dans  $U$  tel que  $\alpha(0) = \beta(0)$  et  $\alpha(1) = \beta(1)$ .

On dit que  $\alpha$  et  $\beta$  sont proches dans  $U$  s'il existe  $D_1, \dots, D_n$  des disques ouverts dans  $U$  et  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$  une partition de  $[0, 1]$  tel que  $\alpha([t_{i-1}, t_i]) \cup \beta([t_{i-1}, t_i]) \subseteq D_i, \forall i \in [n]$ .

**Lemma 6.** Soit  $U \subseteq \mathbb{C}$  un domaine,  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe et  $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow U$  deux chemins dans  $U$  tel que  $\alpha(0) = \beta(0)$  et  $\alpha(1) = \beta(1)$ .

Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont proches dans  $U$  alors  $\int_\alpha f(\zeta) d\zeta = \int_\beta f(\zeta) d\zeta$ .

*Proof.* Comme  $\alpha$  et  $\beta$  sont proches dans  $U$ , il existe  $D_1, \dots, D_n$  des disques ouverts dans  $U$  et  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$  une partition de  $[0, 1]$  tel que  $\alpha([t_{i-1}, t_i]) \cup \beta([t_{i-1}, t_i]) \subseteq D_i, \forall i \in [n]$ .

Comme  $f$  est holomorphe,  $\forall i \in [n]$  il existe  $F_i : D_i \rightarrow \mathbb{C}$  une primitive de  $f$  sur  $D_i$ .

Comme  $F_i$  et  $F_{i+1}$  ont la même dérivée sur  $D_i \cap D_{i+1}$  pour chaque  $i \in [n-1]$  et que  $D_i \cap D_{i+1}$  est connexe par arc alors  $\forall i \in [n-1] \exists c_i \in \mathbb{C}$  tel que  $F_{i+1}(z) = F_i(z) + c_i, \forall z \in D_i \cap D_{i+1}$ .

Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned} \int_\alpha f(\zeta) d\zeta - \int_\beta f(\zeta) d\zeta &= \sum_{i=1}^n F_i(\alpha(t_i)) - F_i(\alpha(t_{i-1})) - (F_i(\beta(t_i)) - F_i(\beta(t_{i-1}))) \\ &= \sum_{i=1}^n F_i(\alpha(t_i)) - F_i(\beta(t_i)) - \sum_{i=0}^{n-1} F_{i+1}(\alpha(t_i)) - F_{i+1}(\beta(t_i)) \\ &= F_n(\alpha(t_n)) - F_1(\alpha(t_0)) - (F_1(\beta(t_n)) - F_1(\beta(t_0))) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} (F_{i+1}(\alpha(t_i)) - F_i(\alpha(t_i))) - (F_{i+1}(\beta(t_i)) - F_i(\beta(t_i))) \\ &= 0 \end{aligned}$$

où nous avons utilisé dans la dernière ligne le fait que  $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$ ,  $\alpha(t_n) = \beta(t_n)$  et  $F_{i+1} - F_i = c_i \forall i \in [n-1]$ .  $\square$

**Corollary 2.** Soit  $U \subseteq \mathbb{C}$  un domaine,  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe et  $\alpha_1, \dots, \alpha_n : [0, 1] \rightarrow U$  des chemins dans  $U$  tels que  $\alpha_i(0) = \alpha_1(0)$  et  $\alpha_i(1) = \alpha_1(1)$  pour tout  $i \in [n]$ .

Supposons de plus que  $\alpha_i$  et  $\alpha_{i+1}$  soient proches dans  $U \forall i \in [n-1]$ , alors

$$\int_{\alpha_1} f(\zeta) d\zeta = \int_{\alpha_2} f(\zeta) d\zeta = \dots = \int_{\alpha_n} f(\zeta) d\zeta$$

*Proof.*  $\square$

**Lemma 7.** Soit  $U \subseteq \mathbb{C}$  un domaine,  $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow U$  deux chemins dans  $U$  ayant les mêmes extrémités et  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$  une homotopie entre  $\alpha$  et  $\beta$  fixant les extrémités, alors

$$\int_\alpha f(\zeta) d\zeta = \int_\beta f(\zeta) d\zeta.$$

*Proof.*  $C := H([0, 1] \times [0, 1]) \subseteq U$  est un compact donc  $d(C, U^c) = 2\epsilon > 0$ .

Comme  $H$  est uniformément continue, il existe  $\delta > 0$  tel que  $|H(t, s) - H(t', s')| \leq \epsilon$  si  $|t - t'|, |s - s'| \leq \delta$ .

Soit  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\frac{1}{N} \leq \delta$ .

Définissons  $\alpha_i : [0, 1] \rightarrow U$  par  $\alpha_i(t) = H(t, \frac{i}{N})$  pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, N\}$ .

En particulier,  $\alpha_0 = \alpha$  et  $\alpha_N = \beta$ .

Montrons que  $\alpha_{i-1}$  et  $\alpha_i$  sont proches dans  $U \forall i \in [N]$ .

Pour cela, fixons  $i \in [N]$  et considérons la partition régulière de  $[0, 1]$  donnée par  $\{t_j := \frac{j}{N} | j = 0, 1, \dots, N\}$ .

Définissons  $D_j = D(\alpha_i(t_j)) \forall j \in [N]$  alors  $D_j \in U \forall j \in [N]$ .

$\forall t \in [t_{j-1}, t_j], s \in [t_{i-1}, t_i]$ , nous avons que  $|t - t_j|, |s - t_i| \leq \frac{1}{N} \leq \delta$  donc  $\alpha_{i-1}([t_{j-1}, t_j]) \cup \alpha_i([t_{j-1}, t_j]) \subseteq D_j$ .

Nous avons alors montré que  $\alpha_{i-1}$  et  $\alpha_i$  sont proches  $\forall i \in [N]$ .  $\square$

**Definition 6.** Soit  $U \subseteq \mathbb{C}$  un domaine et  $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow U$  deux lacets dans  $U$ .

On dit que  $\alpha$  et  $\beta$  sont proches dans  $U$  s'il existe  $D_1, \dots, D_n$  des disques ouverts dans  $U$  et  $\{t_0 < t_1 < \dots < t_n\}$  une partition de  $[0, 1]$  tel que  $\alpha([t_{i-1}, t_i]) \cup \beta([t_{i-1}, t_i]) \subseteq D_i, \forall i \in [n]$ .

**Lemma 8.** Soit  $U \subseteq \mathbb{C}$  un domaine,  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe et  $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow U$  deux lacets dans  $U$ .

Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont proches dans  $U$  alors  $\oint_{\alpha} f(\zeta) d\zeta = \oint_{\beta} f(\zeta) d\zeta$ .

*Proof.* Comme  $\alpha$  et  $\beta$  sont proches dans  $U$ , il existe  $D_1, \dots, D_n$  des disques ouverts dans  $U$  et  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$  une partition de  $[0, 1]$  tel que  $\alpha([t_{i-1}, t_i]) \cup \beta([t_{i-1}, t_i]) \subseteq D_i, \forall i \in [n]$ .

Comme  $f$  est holomorphe,  $\forall i \in [n]$  il existe  $F_i : D_i \rightarrow \mathbb{C}$  une primitive de  $f$  sur  $D_i$ .

Comme  $F_i$  et  $F_{i+1}$  ont la même dérivée sur  $D_i \cap D_{i+1}$  pour chaque  $i \in [n-1]$  et que  $D_i \cap D_{i+1}$  est connexe par arc alors  $\forall i \in [n-1] \exists c_i \in \mathbb{C}$  tel que  $F_{i+1}(z) = F_i(z) + c_i, \forall z \in D_i \cap D_{i+1}$ .

De plus,  $\exists c_n \in \mathbb{C}$  tel que  $F_n(z) = F_1(z) + c_n, \forall z \in D_1 \cap D_n$ . Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} f(\zeta) d\zeta - \int_{\beta} f(\zeta) d\zeta &= \sum_{i=1}^n F_i(\alpha(t_i)) - F_i(\alpha(t_{i-1})) - (F_i(\beta(t_i)) - F_i(\beta(t_{i-1}))) \\ &= \sum_{i=1}^n F_i(\alpha(t_i)) - F_i(\beta(t_i)) - \sum_{i=0}^{n-1} F_{i+1}(\alpha(t_i)) - F_{i+1}(\beta(t_i)) \\ &= F_n(\alpha(t_n)) - F_n(\beta(t_n)) - (F_1(\alpha(t_0)) - F_1(\beta(t_0))) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} (F_{i+1}(\alpha(t_i)) - F_i(\alpha(t_i))) - (F_{i+1}(\beta(t_i)) - F_i(\beta(t_i))) \\ &= 0 \end{aligned}$$

où dans la dernière ligne, nous avons utilisé le fait que  $\alpha(t_0) = \alpha(t_n), \beta(t_0) = \beta(t_n), F_{i+1} - F_i = c_i \forall i \in [n-1]$  et  $F_n - F_1 = c_n$ .  $\square$

**Corollary 3.** Soit  $U \subseteq \mathbb{C}$  un domaine,  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe et  $\alpha_1, \dots, \alpha_n : [0, 1] \rightarrow U$  des lacets dans  $U$ .

Supposons que  $\alpha_i$  et  $\alpha_{i+1}$  soient proches dans  $U \forall i \in [n-1]$ , alors

$$\oint_{\alpha_1} f(\zeta) d\zeta = \oint_{\alpha_2} f(\zeta) d\zeta = \dots = \oint_{\alpha_n} f(\zeta) d\zeta$$

*Proof.*

□

**Lemma 9.** Soit  $U \subseteq \mathbb{C}$  un domaine,  $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow U$  2 lacets  $C^1$  et  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$  une homotopie de lacets entre  $\alpha$  et  $\beta$ , alors

$$\oint_{\alpha} f(\zeta) d\zeta = \oint_{\beta} f(\zeta) d\zeta$$

*Proof.* La preuve suit le même format que celle du lemme 6.

□

**Theorem 1.** Soit  $U \subseteq \mathbb{C}$  un domaine simplement connexe et  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe alors  $f$  admet une primitive sur  $U$ .

*Proof.* Il suffit de montrer que  $\oint_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = 0$  pour tout lacet  $\gamma$  dans  $U$ .

Comme  $U$  est simplement connexe, tout lacet est homotope au lacet au constant, ce qui conclut la preuve.

□

Résumons la démarche suivie pour montrer qu'une fonction holomorphe admet une primitive sur des simplement connexes:

1. Une fonction holomorphe admet des primitives locales,
2. Une fonction qui admet des primitives locales a la même intégrale sur des chemins proches ayant les mêmes extrémités ou sur des lacets proches,
3. Pour passer de chemins proches à chemins homotopes, il nous a fallu généraliser la définition d'intégrale curviligne pour tenir compte d'intégrales le long de courbes pas nécessairement  $C^1$ ,
4. En utilisant l'homotopie, nous avons montré que l'intégrale ne dépend que de la classe d'homotopie d'un chemin,
5. Dans les simplement connexes, ceci suffit à obtenir l'existence de primitive globale.

A présent, nous allons décrire une alternative à l'étape 3. Plus précisément, nous allons montrer qu'étant donné une homotopie entre deux chemins  $C^1$ , il est possible d'obtenir une suite d'homotopie  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}$ , n'importe quel chemin intermédiaire de  $H_n$  est  $C^1$ . Nous allons simplement énoncer les définitions et les résultats sans pour autant les prouver (exercice).

**Definition 7.** Une suite de fonctions  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  est une approximation de l'identité si

1.  $\int_{\mathbb{R}} f_n = 1 \forall n \in \mathbb{N}$ ,
2.  $\forall \delta > 0 \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| > \delta} f_n = 0$ ,

Un exemple d'approximation de l'identité est la suite de fonctions  $\left( n \chi_{(-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n})} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ . Motivons cette définition par une application.

Nous savons que l'ensemble des fonctions Lipschitzienne est dense dans  $C^0([a, b])$  pour la norme sup avec  $a < b$  dans  $\mathbb{R}$ . Une façon de prouver ceci serait d'utiliser le fait que  $f$  soit uniformément continue et de construire une approximation affine par morceaux. Une autre méthode de preuve est d'utiliser une approximation de l'identité.

En effet, prenons  $f \in C^0([a, b])$  et considérons le prolongement  $\tilde{f}$  sur  $[a - 1, b + 1]$  donné par  $\tilde{f}(x) = f(x)$  si  $x \in [a, b]$ ,  $\tilde{f}(x) = f(a)$  si  $x \in [a - 1, a]$  et  $\tilde{f}(x) = f(b)$  si  $x \in [b, b + 1]$ .

Remarquons que  $\tilde{f}$  est uniformément continue sur  $[a-1, b+1]$  et posons  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n(x) = \tilde{f} * \left( n\chi_{(-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n})} \right)(x) = \int_a^b \tilde{f}(y)\chi_{(-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n})}(x-y)dy$  pour tout  $x \in [a, b]$ . La suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ainsi définie est  $C^1$  sur  $[a, b]$  à dérivée bornée donc Lipschitzienne et  $f_n \rightarrow f$  uniformément.

Nous allons utiliser la même démarche pour obtenir notre suite d'homotopies.

Plus précisément, prenons  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un domaine et  $\alpha, \beta$  deux chemins  $C^1$  homotopes ayant les mêmes extrémités dans  $U$  et dénotons par  $H$  l'homotopie.

Nous savons que  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$  est une fonction définie sur un compact, son image est alors compacte ainsi  $Im(H) \Subset \Omega$  donc  $d(Im(H), \Omega^c) > 0$ .

A priori, les chemins intermédiaires de  $H$  donnés par  $\gamma_s(t) = H(t, s)$  pour tout  $t \in [0, 1]$  et n'importe quel  $s \in [0, 1]$  ne sont pas  $C^1$ .

Prenons alors une approximation de l'identité donnée par  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et définissons la suite d'homotopie  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par

$$H_n(t, s) = (f_n * \gamma_s)(t), \quad \forall s, t \in [0, 1].$$

Il faut encore démontrer que pour tout  $n$  suffisamment grand  $H_n \in \Omega$ ,  $H_n$  est une homotopie pour tout  $n$ , les chemins intermédiaires de  $H_n$  sont  $C^1$ ,  $H_n(\bullet, 0) \rightarrow \alpha$  et  $H_n(\bullet, 1) \rightarrow \beta$  uniformément pour la norme  $C^1$ .

En utilisant toutes ces propriétés, si  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction holomorphe alors

$$\int_{\alpha} f dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{H_n(\bullet, 0)} f dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{H_n(\bullet, 1)} f dz = \int_{\beta} f dz.$$