

ANALYSE III TEST BLANC

5 DÉCEMBRE 2019

Nom et prénom: _____

SCIPER: _____

- Matériel autorisé: aucun (pas de photocopié, pas de calculatrice)
- Les problèmes sont ordonnés par ordre croissant de difficulté. Le dernier problème est difficile.
- Vous pouvez utiliser sans les reprover les énoncés vus en classe et en exercices, à condition de les énoncer clairement.
- Vous avez 10 problèmes, chaque problème vaut 7 points. Pour les questions vrai/faux, un point pour la bonne réponse, 6 points pour la preuve (si vrai) ou le contre-exemple (si faux).
- Vous pouvez écrire sur des feuilles de brouillon, mais les réponses qui seront corrigées devront figurer sur les feuilles.
- On écrit $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

(1) Montrer que

$$\int_0^1 e^t dt + i \int_0^1 e^{1+it} dt = -i \int_{\pi/2}^{\pi} e^{(1+e^{it})} e^{it} dt.$$

- (a) Le membre de droite définit l'intégrale de contour de la fonction e^z de 0 à $1+i$ et le deuxième aussi, le long de deux contours différents. Comme la fonction exponentielle n'a pas de pôle, l'intégrale ne dépend pas du contour.

(2) Soit $\omega \in \mathbb{R}$, calculer la transformation de Laplace de la fonction $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = \cos(\omega t)$.

- (a) On a $\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty \cos(\omega t) e^{-st} dt = \frac{1}{2} (\int_0^\infty e^{-(s+i\omega)t} dt + \int_0^\infty e^{-(s-i\omega)t} dt)$ les intégrales ci-dessus existent si $\Re(s+i\omega) = s < 0$ et on a

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{2} \left(\int_0^\infty e^{-(s+i\omega)t} dt + \int_0^\infty e^{-(s-i\omega)t} dt \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s+i\omega} + \frac{1}{s-i\omega} \right) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

(3) Si $f : \overline{\mathbb{H}} \rightarrow \mathbb{C}$ (où $\overline{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \mathbb{R}$) une fonction continue telle que $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe montrer que $\tilde{f} : \mathbb{H}_- \rightarrow \mathbb{C}$

$$\tilde{f}(z) := \bar{f}(\bar{z})$$

est holomorphe, où $\bar{z}$ désigne le conjugué complexe et $\mathbb{H}_- = \{z \in \mathbb{C} : \Im z < 0\}$.

(a) Il est clair que c'est une fonction $\mathcal{C}^1$; il suffit de vérifier les équations de Cauchy-Riemann: pour $x + iy$ avec $x \in \mathbb{R}, y > 0$

$$\begin{aligned}\partial_x \Re(f(x - iy)) &= \partial_x \Re(f(x + iy)) \\ &= \partial_y \Im(f(x + iy)) \\ &= -\partial_y \Im(f(x - iy)) \\ &= \partial_y \Im(\bar{f}(x - iy))\end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned}\partial_y \Re(f(x - iy)) &= \partial_y \Re(f(x + iy)) \\ &= -\partial_x \Im(f(x + iy)) \\ &= -\partial_x \Im(f(x - iy)) \\ &= -\partial_x \Im(\bar{f}(x - iy))\end{aligned}$$

(4) Si $(f_n)_{n \geq 0}$ est une suite de fonctions holomorphes $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ avec $f_n \rightarrow f$ est avec $f_n, f \neq 0$ sur $\partial\mathbb{D}$ montrer que

$$\sum_{z \in \mathbb{D} \cap \text{zéros}(f_n)} \nu_z(f_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{z \in \mathbb{D} \cap \text{zéros}(f)} \nu_z(f),$$

où $\nu_z(f)$ dénote l'ordre (la multiplicité) du zéro de f en z .

(a) Cela suit du théorème des résidus appliqué à $\frac{f'_n}{f_n}$ qu'on intègre sur $\partial\mathbb{D}$ (où tout se passe bien car $f_n \neq 0$ et la limite est non nulle); déjà vu en cours.

- (5) Soit $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non constante; montrer que $\Re(f)$ ne peut pas avoir de minimum ou de maximum sur $\mathbb{D}$.
- (a) On pose $g = e^f$, $h = e^{-f}$, et on a que $|g| = e^{\Re(f)}$ et $|h| = e^{-\Re(f)}$ ne peuvent pas avoir de maximum sur $\mathbb{D}$; comme $x \mapsto e^x$ est monotone sur les réels, on déduit le résultat.

- (6) Si $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe qui s'annule en $\frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$, est-il toujours vrai que f est nulle ?
- (a) Non, on peut prendre la fonction $\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)$.

- (7) Trouver une fonction entière telle que $f(z) = w$ a un nombre infini de solutions pour tout $w \in \mathbb{C}$ et justifier.
- (a) La fonction exponentielle prend toutes les valeurs sauf 0, un nombre infini de fois (car elle est $2\pi i$ -périodique).
Si on soustrait 1 et qu'on met au carré, on prend toutes les valeurs $z \mapsto (e^z - 1)^2$ avec la même périodicité.
 - (b) Ceci dit, la fonction $z \mapsto \sin z$ convient très bien (mais il faut connaître quelques formules trigonométriques).

- (8) Soit $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que $z^2 f(z) \rightarrow 0$ quand $|z| \rightarrow +\infty$. Montrer que le résidu de f en 0 vaut 0.
- (a) Le résidu est donné par $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0, \alpha)} f(z) dz$ pour tout $\alpha > 0$. En prenant $\alpha \rightarrow +\infty$, on voit que l'intégrale tend vers 0.

- (9) Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe injective. Montrer que f est surjective.
- (a) On a que f est une application conforme sur son image.
 - (b) L'image de f est simplement connexe et elle doit être égale à $\mathbb{C}$ sinon on pourrait utiliser le théorème de l'application conforme de Riemann pour envoyer cette image sur $\mathbb{D}$ et on aurait une fonction entière bornée qui serait constante, ce qui serait absurde.

- (10) Soient $z_1, \dots, z_{2n} \in \mathbb{C}$ des nombres complexes distincts et soit M la matrice antisymétrique $2n \times 2n$ avec coefficients $m_{ij} = \frac{1}{z_i - z_j}$ pour $i \neq j$ et $m_{ii} = 0$. Montrer par récurrence que

$$\det M = \sum_{\sigma} \frac{1}{(x_{\sigma(1)} - x_{\sigma(2)})^2 \cdots (x_{\sigma(2n-1)} - x_{\sigma(2n)})^2}$$

où la somme est sur tous les partitions $\{\{\sigma(1), \sigma(2)\}, \dots, \{\sigma(2n-1), \sigma(2n)\}\}$ de l'ensemble $\{1, \dots, 2n\}$ en n sous-ensembles de 2 éléments telles que $\sigma(2j-1) < \sigma(2j)$ pour tous $j = 1, \dots, n$.

- (a) Preuve: supposons la formule vraie pour n . En fonction de z_1 , le déterminant est une fonction rationnelle avec un pôle double en z_2 ; on peut écrire

$$\det M = \frac{c_{-2}}{(z_1 - z_2)^2} + \frac{c_{-1}}{(z_1 - z_2)} + c_0 + \cdots$$

Le coefficient c_{-1} est nul par antisymétrie par rapport à l'échange de z_1 et z_2 . Le coefficient c_{-2} est obtenu en prenant le déterminant de la matrice M_{12} obtenue en effaçant les deux premières lignes et colonnes de M . Ainsi, le membre de gauche et de droite ont les mêmes pôles et décroissent à l'infini; ils diffèrent d'une constante qui est nulle par homogénéité.